カオス・ニューロンによる決定論的グラウバーモデル

広島県大経情　田中　稔次朗

鹿児島大理　　井上　正義

九州大理　　　藤坂　博一

1．はじめに

複雑系のモデルとしてカオス・ニューラルネットワーク用いた系の時間発展が最近興味を持たれている．ここで考察するモデルは、2値 (+1,-1) のカオスニューロン（カオス素子）が格子点にあり、それらのニューロン、つまりスピン同志が強磁性的または反強磁性的に相互作用しているイジングスピン系である．ただし、このカオスニューロンは2個のカオス振動子が結合した内部構造を持ち、ニューロンの出力、すなわちスピン状態は結合振動子の運動状態から決定される．この研究の目的は、カオスニューロンを用いた同期的かつ決定論的なグラウバーモデルにおける自己組織化のダイナミックスを調べることである[1]．初期状態スピン配列から安定な状態へ自己組織化していく過程における1スピン当たりのエネルギーおよび磁化の時間変化を計算した.

2．モデルの定式化と数値計算

ネットワークを構成するカオスニューロンのモデルは、結合した2つのカオス振動子から構成されている．ここでは離散時間について系の時間発展を考える．ij 番目のニューロン内の結合振動子系の運動方程式は次のように与えられる[2]．

$$\begin{pmatrix} x_{ij}(\tau_n+1) \\ y_{ij}(\tau_n+1) \end{pmatrix} = \frac{1}{1+2D_{ij}(\tau_n)} \begin{pmatrix} 1+D_{ij}(\tau_n) & D_{ij}(\tau_n) \\ D_{ij}(\tau_n) & 1+D_{ij}(\tau_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x_{ij}(\tau_n)) \\ g(y_{ij}(\tau_n)) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

ただし、$D_{ij}(\tau_n)$ は時刻 τ_n における ij 番目のニューロン内の二つの振動子の結合係数である. $x_{ij}(\tau_n)$ $(1 \le x_{ij}(\tau_n) < 1)$ および $y_{ij}(\tau_n)$ $(0 \le y_{ij}(\tau_n) < 1)$ は、それぞれ ij 番目のニューロンに含まれる二つの振動子の変数を表す．マップとして $f(x) = ax(1-x)$ および $g(y) = by(1-y)$ のロジスティック関数を用いる．なお、a ,b はコントロールパラメータである．ここで $a = b$ かつ $D_{ij}(\tau)$ が

一定ならば、このモデルは Yamada-Fujisaka モデル[3]に帰着する．$x_{ij}(\tau_n)$，$y_{ij}(\tau_n)$ は $a = b = 4$ のときカオス運動をしているが、結合振動子の同調、非同調の判定は、パラメータ $\Delta_{ij}(\tau_n) = |x_{ij}(\tau_n) - y_{ij}(\tau_n)|$ によって行われる．カオスニューロンのダイナミックスは（1）によって与えられ、時刻nにおけるij番目のニューロンの値 $u_{ij}(n)$ は次のように求まる．

$$u_{ij}(n) = \begin{cases} +1 & (\Delta_{ij}(\tau_n) < \varepsilon\ ) \\ -1 & (otherwise\ ) \end{cases} \tag{2}$$

ここで ε は同調の判定パラメータである．なお、結合係数 $D_{ij}(n)$ は他のニューロンの状態 $\{u_{ij}(n)\ \}$ によって決まる．

$$D_{ij}(n) = \sum_{kl} W_{ij,kl} u_{kl}(n) - h_{ij} + D_c \tag{3}$$

ニューロン（スピン）の状態が決定ただし、（3）の右辺が負のときは $D_{ij}(n) = 0$ とおく．式（3）と（1）、（2）により、次の時刻におけるされる．

カオス・ニューラルネットワークによるスピン系のエネルギーは次のように表される[4]．

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{ij} \sum_{kl} u_{ij} u_{kl} - \sum_{ij} h_{ij} u_{kl}, \tag{4}$$

ただし、$W_{ij,kl} = W_{kl,ij}\quad (ij \neq kl)$、また $W_{ij,ij} = 0$ である．ここで $W_{ij,kl}$ は ij-格子と kl-格子上のニューロンの結合定数で $W_{ij,kl} > 0$ の場合は強磁性的相互作用、$W_{ij,kl} < 0$ の場合は反強磁性的相互作用を表す．$u_{ij} = \pm 1$ は ij-格子点におけるニューロンの出力値、すなわちイジングスピンである．h_{ij} は外部磁場に対応する量である．また、1スピン当たりの磁化は次のように与えられる．

$$m_n(n+1) = \frac{1}{N} \sum_{ij} u_{ij}(n+1) \tag{5}$$

シミュレーションはニューロン数が 10 × 10 で、最隣接ニューロン間にのみ反強磁性的相互作用 $W_{ij,kl} = -1$ が存在する系について行う．初期状態として強磁性スピン配列をとり、この系がどのように時間発展していくかを調べる．計算ではカオスニューロンの内部パラメータを $a = 4.0,\ b = 3.995$ および $\varepsilon = 0.0005$ とする．図1および図2は、それぞれネットワークのエネルギーとスピンパターンのシミュレーションの結果である．系の状態は50ステップ毎にストロボ

的パターンとしてアップスピンを黒丸、ダウンスピンを白丸で表す.

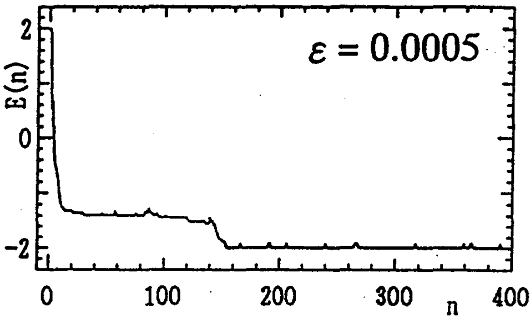

図1. 1スピン当たりのエネルギーの時間変化.

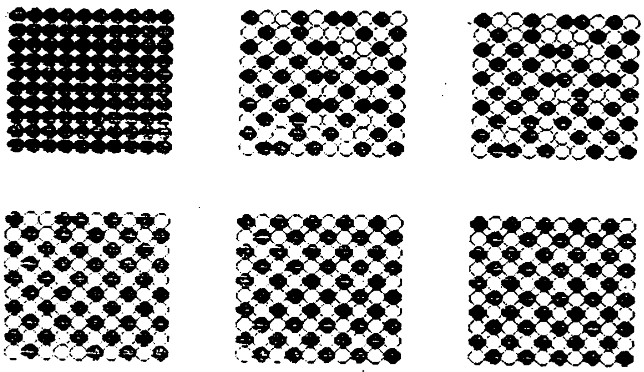

図2. スピンパターンの時間発展.

3. まとめ

カオスニューロンによる複雑系の自己組織化モデルとしてのスピン系のダイナミックスを調べた. 初期状態の強磁性的スピン配列から安定な反強磁性状態へと自己組織化していく過程における1スピン当たりのエネルギーおよび磁化の時間変化を計算した. また、エネルギーに対する磁場の効果も調べた. この系は決定論に従いながら確率論的振る舞いを示し、与えられた初期状態から安定なスピン状態へと自己組織化していくことがわかった.

参考文献

1) R. J. Glauber, J. Math. Phys. 4 (1963) 294.
2) M. Inoue and A. Nagayoshi, Phys. Lett. A 158 (1991) 373.
3) T. Yamada and H. Fujisaka, Prog. Theor. Phys. 70 (1983) 1240.
4) J. J. Hopfield, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 79 (1982) 2554.